灵活解题数例

323000 浙江省丽水中学 吴丽娟

最近读了日本学者冈部恒治所著《训练思考能力的数学书》, 很受启发, 此书借助抽象化, 把看似没什么关联的, 浅显易懂的小问题连结在一起, 但其中所用方法可以成为思考其他问题的灵感源泉. 现从中选出部分, 结合高中阶段所学知识整理成下文.

问题1　如图1, 将厚度为0.02cm的卷筒纸, 在直径为10cm的圆筒上卷成直径20cm的大小. 试求出这卷卷筒纸的总长度.

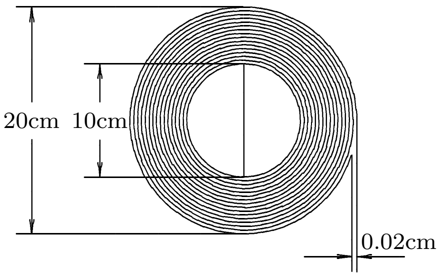

图1

解法1: 拿一个实际的卷筒纸拉出来量一下就可以了. 无论其他解法多么好, 这种方法还是受到很多同学的支持. 它的缺点是, 要找到问题中指定大小的卷筒纸是很困难. 因此要以计算的方式来解决问题.

解法2: 这卷卷筒纸可以看成是以同心圆卷在一起的, 那么它最外侧的圆直径就是20cm, 而向内的下一个圆依次减少0.04cm, 因此各个圆的直径是一个等差数列. 所以利用等差数列求和公式得

$C=(20+19.96+19.92+\cdots+10.08+10.04)\pi=3755\pi\approx 11790.7\,\mathrm{cm}\approx 118\,\mathrm{m}.$

解法3: 请大家在脑海中试着将所有的纸都拉出来, 从侧面看, 形成了图2的形状.

则圆环面积=长方形面积. 即

$100\pi-25\pi=0.02x,$

$x=3750\pi\approx 11775\mathrm{cm}\approx 118\,\mathrm{m}.$

通常为了将问题变简单, 我们很习惯进行

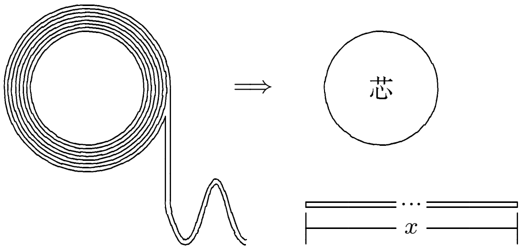

图 2

了"三变二, 二变一"降低次元, 把空间问题化为平面问题, 把平面问题化为长度问题. 但有时升高次元也能为我们解题带来方便. 例如:

问题2 如图3, 等腰$\triangle ABC$中, $AB=AC$, $CE\perp AB$, $BD\perp AC$, 求证: $BD=CE$.

可利用三角形全等, 证法很多.

另解: $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=\dfrac{1}{2}AB\cdot CE$, 由$AB=AC$得出$BD=CE$.

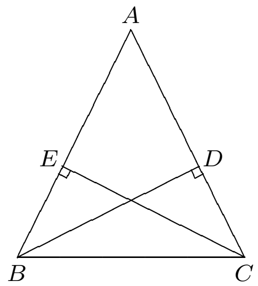

图 3

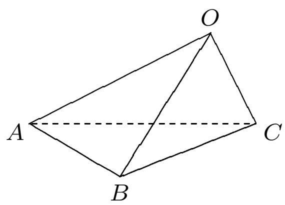

图 4

问题3 如图4, 三棱锥$O-ABC$中, OA、OB、OC两两互相垂直, $OA=OB=2$, $OC=1$, 求O到平面ABC的距离.

利用$V_{O-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABO}\cdot OC$

$=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h$.

解得$h=\dfrac{S_{\triangle ABO}\cdot OC}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

可以不需要作出三棱锥的高.

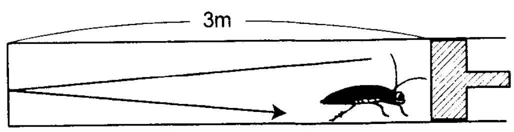

图 5

问题4 如图5, 有一只蟑螂被关进了一个3米长的气缸中, 活塞以每分钟1米的速度开始往内闭合. 于是蟑螂开始慌张地由活塞处往内奔跑, 它一碰到墙壁就转个弯又回到活塞处, 然后又转个弯$\cdots\cdots$, 就这样一直来回的奔跑, 最后终于被夹住了. 假设蟑螂一直以每分钟200米的速度持续的奔跑, 请问它到底跑了多少距离呢?

这个问题, 有的同学把重点放在蟑螂跑的路线上, 象"先向左2m, 然后向右xm, $\cdots$" 这样就不能继续下去了. 其实在活塞从开始到结束的3分钟时间内蟑螂虽然有改变方向, 但一直在持续奔跑. 因此答案就是$200\times 3=600\,\mathrm{m}$.

在面临问题时, 要不断地问自己:"问题的关键是什么? 在问题条件下, 什么是可以忽略的?"

问题5 有两株牵牛花, 如图6般缠绕着两个圆锥体. 圆锥的高度都是2m, 底面直径分别为1m和50cm. 此时, 假设牵牛花相对于水平面以30° 角向上延伸. 请问当两株牵牛花都攀延到最顶端时, 哪一株的长度比较长呢?

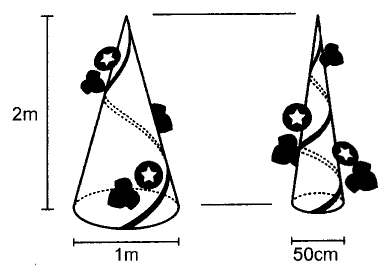

图 6

这个问题的关键在于"相对于水平面, 以30° 角向上延伸". 如图7, 可试着将牵牛花拉出来, 变成一条直线. 从而知道, 藤蔓的长度都是4m.

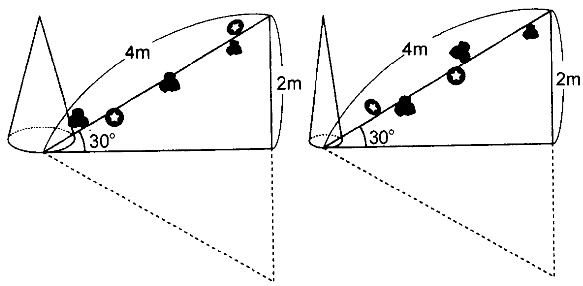

图 7

下面看一个数列问题

问题6 如图8, $\triangle AP_1B$中, $BP_1\perp AP_1$, $AP_1=2$, $\angle A=30^\circ$, $P_nQ_n\perp AB$, $P_{n+1}Q_n\perp AP_1$, 试求出$S=P_1Q_1+P_2Q_2+P_3Q_3+\cdots$的值.

解法1: $P_1Q_1=1$, $\triangle AP_1Q_1\backsim\triangle AP_2Q_2$, 相似比为4:3, 所以$P_2Q_2=\dfrac{3}{4}$,

同理可得$P_nQ_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$,

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{1-\dfrac{3}{4}}=4.$$

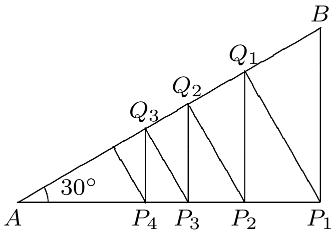

图 8

解法2: 如图9, 将P_1Q_1延长, 作成一个直角三角形, 这时三角形的斜边就是我们要求总和$S=4$

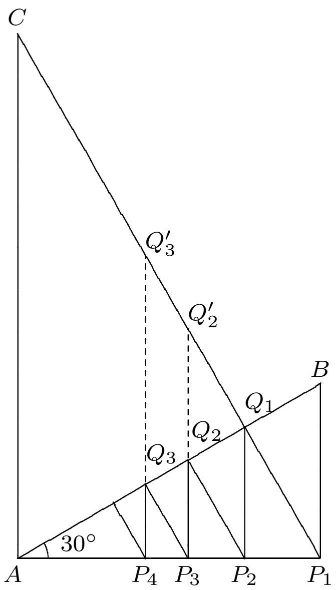

图 9

可见做题目时判断力很重要, 多想想可能会有更简单的方法.

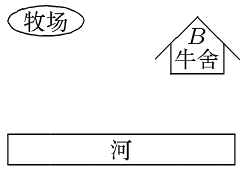

图 10

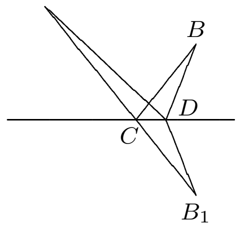

图 11

问题7　如图10, 有牧场A, 牛舍B以及一条小河. 现在要从牛舍把牛带到河边去喝水, 然后再带到牧场去, 请问最近的路应该怎么走?

尝试以河岸为对称轴, 将牛舍移到对称的位置(如图11). 设B_1为牛舍B关于小河的对称点, 让牛在AB_1直线与河岸的交点C处喝水就行. 如果经过的是不同的点D, 那么就会有$AC+CB=AC+CB_1<AD+DB_1=AD+BD$. 应用对称性解题我们平时也是经常碰到的.

问题8　如图12, 在直线m : $x+y-4=0$上任取一点M, 过M且以$F_1(-2,0)$、$F_2(2,0)$为焦点作椭圆, 求所作椭圆中长轴最短时的椭圆方程.

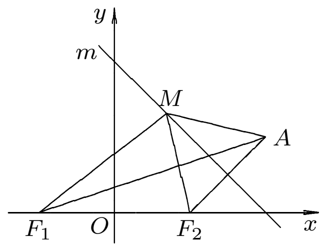

图 12

简析: 作F_2关于直线m的对称点$A(4,2)$则

$2a=|MF_1|+|MF_2|=|MF_1|+|MA|\geqslant|AF_1|=2\sqrt{10}$,

此时椭圆方程为$\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{6}=1$.

另解: 设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-4}=1$, 由

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-4}=1,\\ x+y-4=0,\end{cases}$$

消去y后得到

$$(2a^2-4)x^2-8a^2x+20a^2-a^4=0.\cdots(1)$$

由题可知, 椭圆和直线有交点, 因此方程(1)的$\Delta\geqslant0$, 解得$a^2\geqslant10$.

相比较用对称性解题运算量少很多. 再如:

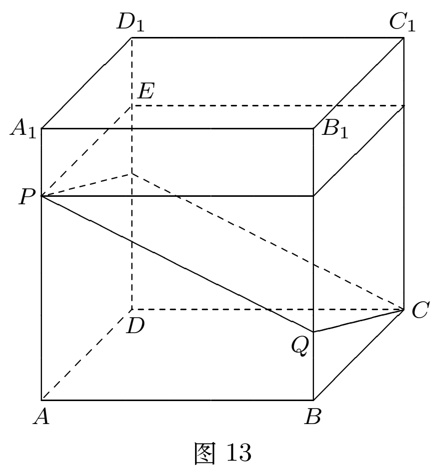

图 13

(下转封底)

(上接第8–33页)

问题9　图13是一个边长为a的立方体, 在AA_1和BB_1上取点P、Q, 使得$A_1P = BQ = \frac{1}{4}a$. 然后用过C、P、Q三点的面截立方体, 请问在切面下方的立体图形体积是多少?

(1) $\frac{7}{12}a^3$;　(2) $\frac{3}{8}a^3$;

(3) $\frac{11}{24}a^3$;　(4) $\frac{13}{24}a^3$;　(5) $\frac{5}{8}a^3$.

观察过点P面与底面平行的平面将立方体切割后所得到的长方体, 可以发现切割面PQC将此长方体分成2个体积相等的立体图形.

因为切割后下长方体的体积是$\frac{3}{4}a^3$, 所以分成两半后的体积是$\frac{3}{8}a^3$.

参考文献

(日)冈部恒治著. 王秋阳等译. 训练思考能力的数学书. 世界图书出版公司. 2005年2月.